

江苏大学

硕士研究生入学考试样题

A 卷

科目代码: 603

科目名称: 高等数学

满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1、函数 $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$ 的定义域为 _____.

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n})^n =$ _____.

3、设 $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 $f''(-1) =$ _____.

4、函数 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 的极大值为 _____.

5、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, ($a > 0$) 在顶点处的曲率为 _____.

6、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7 \cos^5 x \sin 2x dx =$ _____.

二、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、计算不定积分 $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$.

2、求一曲线方程, 使得这条曲线经过原点且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.

3、设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ xe^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

4、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、证明不等式: $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln(\frac{x+y}{2})$, ($x > 0, y > 0, x \neq y$).

2、设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $0 \leq f'(x) \leq f(x)$, $f(0) = 0$. 证明: 在 $[0, +\infty)$ 上

$$f(x) \equiv 0.$$

3、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 对任意 $\lambda \in R$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

4、设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某个邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 处可导, $f(x_0) = 0$, $g(x)$ 在 x_0 处连续, 试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

四、(12分) 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

五、(14分) 命题“连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数; 连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数”是否正确? 若正确给出证明, 否则请举出反例.

六、(14分) 设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x) = e^x + \int_0^x tf(t)dt - \int_0^x xf(t)dt$, 求 $f(x)$.