江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A 卷

科目代码：601

科目名称：数学分析　　　　　　满分：150　分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算（6×5 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$，则 $f'(0)=$__________

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)(\sqrt{1+x}-1)}=$__________

3. $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx=$__________

4. 已知 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $f'(x)=$__________

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=$__________

6. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，则其收敛半径为__________

二、（10 分）已知 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

三、（10 分）设 $a>b>0, a_1=\dfrac{a+b}{2}, b_1=\sqrt{ab}, a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等。

四、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使下式成立 $2\xi\left(f(b)-f(a)\right)=(b^2-a^2)f'(\xi)$。

五、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$，并求

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

六、(10 分)讨论 p,q 的范围，使得反常积分 $\int_0^{\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}dx$ 收敛。

七、(10 分)设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，试证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

八、(10 分)设 $x^2+y^2+z^2=9$ 和 $x+2y+3z=4$ 确定了 y,z 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$。

九、(10 分)计算 $\iiint\limits_V z^2dxdydz$，其中 V 由 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 所围成区域。

十、(10 分)计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2zdxdy$，$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半球面上侧。

十一、(10 分)抛物面 $x^2+y^2=z$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，求这个椭圆到原点的最长与最短距离。

十二、(10 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项发散级数，试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 的敛散性。

十三、(10 分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx。$$